Quelques théorèmes de base relatifs aux fondements des mathématiques et leurs implications philosophiques[1]

par Kurt Gödel

La recherche sur les fondements des mathématiques a, durant ces dernières décennies, produit quelques résultats, qui me paraissent dignes d'intérêt, non seulement en eux-mêmes, mais aussi en ce qui concerne leurs implications pour les problèmes philosophiques traditionnels quant à la nature des mathématiques. Les résultats eux-mêmes, je crois, sont assez largement connus, mais je pense toutefois qu'il est utile d'en présenter une nouvelle fois les grandes lignes, spécialement compte tenu du fait que, grâce au travail de nombreux mathématiciens, ils ont pris une forme nettement plus satisfaisante que celle qu'ils avaient à l'origine. La plus grande amélioration a été rendue possible grâce à la définition précise du concept de procédure finie, qui joue un rôle décisif dans ces résultats. Il y a plusieurs voies différentes pour arriver à une telle définition, qui mènent cependant toutes au même concept. La voie la plus satisfaisante, selon moi, est de réduire le concept de procédure finie à celui d'une machine dotée d'un nombre fini de parties, ainsi que l'a fait le mathématicien britannique Turing. En ce qui concerne les conséquences des résultats en question, je ne pense pas qu'ils aient été discutés adéquatement ou même simplement remarqués.

Les résultats métamathématiques que j'ai en tête sont tous axés sur, ou, pourrait-on même dire, sont seulement différents aspects d'un fait fondamental, qui pourrait être appelé l'incomplétude ou l'inexhaustivité des mathématiques. On rencontre ce fait dans sa forme la plus simple lorsque la méthode axiomatique est appliquée, non pas à quelque système hypothético-déductif comme la géométrie (où les mathématiciens ne peuvent asserter que la vérité conditionnelle des théorèmes), mais aux mathématiques à proprement parler, c'est-à-dire au corps de ces propositions mathématiques, qui ont un sens absolu, sans recours à aucune hypothèse supplémentaire. Il doit exister des propositions de ce type, car sinon il ne pourrait exister non plus aucun théorème hypothétique. Par exemple, *certaines* implications de la forme : *si tels et tels axiomes sont supposés, alors on a tels et tels théorèmes*, doivent être nécessairement vraies en un sens absolu. De la même manière, tout théorème de la théorie des nombres finitaire tel que 2+2=4 est, sans aucun doute, de ce type. Evidemment, la tâche qui consiste à axiomatiser les mathématiques proprement dites diffère de la conception de l'axiomatique qui a eu cours jusqu'à présent, puisque les axiomes ne sont pas arbitraires, mais doivent être des propositions mathématiques correctes et, en outre, évidentes sans preuve ; on ne peut échapper à la nécessité de supposer certains axiomes ou règles d'inférence évidents sans preuve parce que les preuves doivent avoir un point de départ. Néanmoins, il existe des vues largement divergentes quant à l'extension des mathématiques proprement dites, telles que je les ai définies. Les intuitionnistes et les finitistes, par exemple, rejettent certains de ses axiomes et concepts, que d'autres acceptent, comme la loi du tiers exclu ou le concept général d'ensemble.

[1] Ce texte est la traduction française de la *Gibbs lecture* de Kurt Gödel, donnée en 1951, et dont le manuscrit (n°040293, 040294, 040295, et 040296 du *Nachlass* de Gödel à Princeton) fut rédigé en langue anglaise. Les interpolations, précisions et variantes sont réintégrées entre doubles crochets ([[ ]]). De même, la présence de certains mots illisibles est indiquée par le signe suivant : [?]. (NdT, 24 avril 2008)

Le phénomène d'inexhaustibilité des mathématiques[2], cependant, est toujours présent sous quelque forme, quel que soit le point de vue. Je pourrais donc également expliquer ceci à partir du point de vue le plus simple et naturel, qui prend les mathématiques telles qu'elles sont, sans les restreindre sous la critique. De ce point de vue, toutes les mathématiques sont réductibles à la théorie abstraite des ensembles. Par exemple, la proposition selon laquelle les axiomes de la géométrie projective impliquent un certain théorème signifie que, si un ensemble M d'éléments appelés points et un ensemble N de sous ensembles de M appelés lignes droites satisfait les axiomes, alors le théorème est valide pour N et M. Ou, pour mentionner un autre exemple, un théorème de théorie des nombres peut être interprété comme une assertion à propos des ensembles finis. Le problème en question est donc l'axiomatisation de la théorie des ensembles. Maintenant, si l'on s'attaque à ce problème, le résultat est tout à fait différent de ce à quoi l'on aurait pu s'attendre. Au lieu de se retrouver finalement avec un nombre fini d'axiomes, comme en géométrie, l'on a affaire à des séries infinies d'axiomes qui peuvent s'étendre *ad libitum*, sans aucune limite visible et, apparemment, sans aucune possibilité d'inclure ces axiomes dans une règle finie qui les produise[3]. Ce qui arrive dans le cas où, si l'on veut éviter les paradoxes de la théorie des ensembles sans avoir recours à quelque chose de complément étranger à la procédure mathématique réelle, le concept d'ensemble doit être axiomatisé progressivement[4].

Si, par exemple, nous commençons par les nombres entiers, c'est-à-dire par les ensembles finis d'une espèce particulière, nous avons d'abord les ensembles d'entiers et les axiomes qui s'y réfèrent (axiomes du premier niveau), puis les ensembles d'ensembles d'entiers avec leurs axiomes (axiomes du deuxième niveau), etc., de même pour toute itération finie de l'opération « ensemble de[5] ». Nous avons ensuite l'ensemble de tous ces ensembles d'ordre fini. Mais nous pouvons maintenant traiter cet ensemble exactement de la même manière que nous l'avons fait auparavant avec l'ensemble des entiers, c'est-à-dire considérer ses sous-ensembles (*i.e.* les ensembles d'ordre ω) et formuler les axiomes concernant leur existence. Cette procédure peut évidemment être itérée au-delà d'ω, et en fait jusqu'à n'importe quel nombre ordinal transfini. Ainsi, peut-il être requis que l'axiome suivant consiste en ceci que l'itération est possible pour *tout* ordinal, c'est-à-dire pour n'importe quel type d'ordre appartenant à un ensemble bien ordonné. Mais atteignons-nous maintenant une limite ? En aucune manière, puisque nous avons maintenant une nouvelle opération pour former des ensembles, à savoir en formant un ensemble à partir d'un ensemble initial A et d'un ensemble bien ordonné B en appliquant l'opération « ensemble de » à A autant de fois que l'indique l'ensemble bien ordonné B[6]. Et, en posant B égal à un bon ordre de A, nous pouvons maintenant itérer cette nouvelle opération, et la réitérer dans le transfini. Ceci donnera naissance à encore une nouvelle opération, que nous pouvons traiter de la même manière etc. La prochaine étape sera d'exiger que toute opération produisant des ensembles à partir d'ensembles puisse être itérée jusqu'à n'importe quel nombre ordinal (*i.e.* type d'ordre d'un ensemble bien ordonné). Atteignons-nous cependant maintenant une limite ? Non, parce que nous pouvons exiger que la procédure qui vient d'être décrite puisse non seulement être effectuée avec n'importe quelle opération, mais que, bien plus, il doive exister un ensemble ayant la propriété

[2] Ce concept, concernant les applications considérées dans cette conférence, est équivalent au concept de « fonction d'entiers calculable » (*i.e.* celui dont la définition rend possible de calculer en fait $f(n)$ pour chaque entier n considéré). Les procédures n'opèrent pas sur des entiers mais sur des formules, parce que ces… [?] des formules en question elles peuvent toujours être réduites à des procédures opérant sur des entiers.

[3] Dans les axiomatisations de disciplines non-mathématiques telles que la géométrie physique, ce que j'appelle les mathématiques proprement dites sont présupposées ; et l'axiomatisation ne se réfère au contenu de la discipline que lorsqu'elle va au-delà des mathématiques proprement dites.

[4] Le cas en question n'est pas directement apparent dans la présentation habituelle des axiomes, mais est manifeste lors de l'examen plus approfondi de la signification des axiomes.

[5] L'opération « ensemble de » est sensiblement la même dans l'opération « ensemble des parties » où l'ensemble des parties de M est par définition l'ensemble de tous les sous-ensembles de M.

[6] Afin d'accomplir l'itération, on peut poser que A=B et considérer qu'un bon ordre spécial a été assigné à tout ensemble.

telle que, si cette procédure (avec n'importe quelle opération) est appliquée aux éléments de cet ensemble, on a de nouveau le rassemblement des éléments de cet ensemble.

Vous vous apercevrez, je pense, que nous n'atteignons toujours pas une limite, et qu'il ne peut pas y avoir de limite à cette procédure de formations d'axiomes, car la formulation même des axiomes jusqu'à un certain degré donne naissance à l'axiome suivant. Il est vrai que dans les mathématiques d'aujourd'hui, les plus hauts niveaux de cette hiérarchie ne sont pratiquement jamais utilisés. On peut dire que 99,9 % des mathématiques actuelles sont contenues dans les trois premiers niveaux de cette hiérarchie. En ce qui concerne les buts pratiques, toutes les mathématiques *peuvent* donc être réduites à un nombre fini d'axiomes. Ceci n'est toutefois qu'un simple accident historique, qui n'a aucune importance pour les questions de principe. De plus, il n'est pas totalement improbable que cette caractéristique des mathématiques actuelles puisse avoir quelque chose à voir avec une autre de ses caractéristiques, à savoir son incapacité à prouver certains théorèmes fondamentaux, telle l'hypothèse de Riemann par exemple, et ce malgré de nombreuses années d'efforts. On peut montrer que les axiomes pour les ensembles de plus haut niveau, quant à leur pertinence, ne sont en aucune manière réservés à ces ensembles, mais, au contraire, ont même des conséquences pour le niveau-0, c'est-à-dire la théorie des entiers.

Pour être plus exact, chacun de ces axiomes d'ensemble théoriques entraîne la solution de certains problèmes diophantiens qui sont indécidables si l'on se fonde sur les axiomes précédents[7]. *Les problème diophantiens en question sont du type suivant : Soit P(xl..xn, yl…ym) un polynôme à coefficients entiers donnés et n+m variables xl…xn, yl…ym et l'on considère les variables xi comme inconnues et les variables yi comme paramètres. Le problème est donc : l'équation P=0 a-t-elle des solutions entières pour toute valeur entière des paramètres pour lesquels cette équation n'a pas de solution entière ? Pour chacun de ces axiomes d'ensemble théoriques, on peut assigner un certain polynôme P, pour lequel le problème qui vient d'être formulé devient décidable en raison de cet axiome. Il est peut toujours être conclu que le degré de P n'est pas plus élevé que 4.* Les mathématiques d'aujourd'hui n'ont pas encore appris à faire usage des axiomes d'ensemble théoriques pour la solution de problèmes de théorie des nombres, excepté pour les axiomes du premier niveau. Ils sont en fait employés en théorie analytique des nombres. Mais pour maîtriser la théorie des nombres, c'est, du point de vue démonstratif, insuffisant. Certains types d'ensemble théorique de la théorie des nombres, qui restent encore à découvrir, iraient certainement encore plus loin.

J'ai jusqu'ici essayé d'expliquer ce fait, que j'appelle l'incomplétude des mathématiques, pour une approche particulière de la fondation des mathématiques, à savoir la théorie axiomatique des ensembles. Que, cependant, ce fait soit entièrement indépendant de l'approche particulière et du point de vue choisis apparaît à partir de certains théorèmes très généraux. Le premier de ces théorèmes affirme simplement que, *quel que soit le système bien défini d'axiomes et de règles d'inférence choisis, il existe toujours des problèmes diophantiens du type décrit*[8] *qui sont indécidables par ces règles et axiomes, à la seule condition qu'aucune proposition fausse ne soit dérivable*. Si je parle ici de système bien défini d'axiomes et de règles, ceci signifie seulement qu'il doit être réellement possible d'écrire ces axiomes dans quelque formalisme précis ou, si leur nombre est infini, doit être donnée une procédure finie pour les écrire l'un après l'autre. De la même manière, les règles d'inférence doivent être telles que, étant donné n'importe quelles prémisses, soit les conclusions selon l'une des règles d'inférence peuvent êtres

[7] Afin que ce théorème soit aussi valide du point de vue intuitionniste ou finitiste, est requise l'hypothèse de la consistance des axiomes de la théorie des ensembles qui est bien sûr évidente (et peut donc être abandonnée en tant qu'hypothèse) si la théorie est considérée comme faisant partie des mathématiques proprement dites.

[8] Cette dernière hypothèse peut être remplacée par la consistance (comme le montre Rosser in [*Extensions of some theorems of Gödel and Church*, *Jrn. Symb. Logic*, pp. 87-91]) mais les propositions indécidables ont alors une structure légèrement plus complexe. On peut en outre ajouter l'hypothèse que les axiomes impliquent les propositions primitives… [?] addition et multiplication et <.

écrites, soit il peut être déterminé qu'il n'existe pas de conclusion immédiate selon les règles d'inférence en question. Cette exigence concernant les règles et axiomes est équivalente à l'exigence selon laquelle il devrait être possible de construire une machine finie au sens précis d'une « machine de Turing » qui écrit toutes les conséquences des axiomes l'une après l'autre. Pour cette raison, le théorème en question est équivalent au fait qu'il n'existe pas de procédure finie pour la décision systématique de tous les problèmes diophantiens du type spécifié.

Le deuxième théorème concerne le concept de « libre de contradiction ». Pour un système bien défini d'axiomes et de règles, la question de leur consistance est, bien sûr, en elle-même, une question mathématique bien définie. De plus, puisque les symboles et propositions d'un formalisme sont toujours au plus énumérables, tout peut être calqué sur les nombres entiers et il est plausible, et en fait démontrable, que la question de la consistance puisse toujours être transformée en une question théorique sur les nombres (pour être plus exact, en celle du type décrit plus haut). Le théorème dit que, *pour tout système d'axiomes bien défini et de règles, la proposition qui, en particulier, affirme leur consistance*[9] *(ou plutôt la proposition théorique sur les nombres qui lui est équivalente) est indémontrable à partir de ces axiomes et règles, à condition que ces axiomes et règles soient consistants et suffisent à dériver une certaine partie*[10] *de l'arithmétique finitiste des entiers*. C'est *ce* théorème qui rend l'incomplétude des mathématiques particulièrement évidente. En effet, *il rend impossible que quelqu'un puisse construire quelque système d'axiomes bien défini et de règles, et, de manière consistante, fasse à son sujet les assertions suivantes : tous les axiomes et règles que j'appréhende (avec une certitude mathématique) sont corrects*[11] *et je considère en outre qu'ils contiennent toutes les mathématiques*. Si quelqu'un fait une telle affirmation, il se contredit lui-même. S'il appréhende les axiomes en question comme étant corrects, il considère (avec la même certitude) qu'ils sont consistants. Il a par conséquent une intuition mathématique qui n'est pas dérivable de ses axiomes. Cependant, il convient d'être circonspect afin d'en comprendre la signification de manière claire. Ceci signifie-t-il qu'aucun système bien défini d'axiomes corrects ne puisse contenir toutes les mathématiques proprement dites ? Oui, si par mathématiques proprement dites l'on entend le système de toutes les propositions mathématiques vraies. Non, si l'on entend par là le système de toutes les propositions mathématiques démontrables.

Je distinguerai ces deux significations de mathématiques en mathématiques au sens objectif et mathématiques au sens subjectif. Il est évident qu'aucun système d'axiomes corrects bien défini ne peut comprendre toutes les mathématiques objectives, puisque la proposition qui affirme la consistance est vraie, mais pas démontrable dans le système. Cependant, quant aux mathématiques subjectives, il n'est pas exclu qu'il existe une règle finie qui produise tous ses axiomes évidents. Néanmoins, s'il existe une règle de ce type, avec notre capacité humaine de compréhension, nous ne pourrons sans doute jamais la connaître en tant que telle, c'est-à-dire que nous ne pourrons jamais savoir avec une certitude mathématique que toutes les propositions qu'elle produit sont correctes[12] ; ou, en d'autres termes, nous ne pourrons appréhender comme vraie qu'une proposition après l'autre, pour tout nombre fini d'entre elles. L'assertion selon laquelle elles sont toutes vraies, cependant, pourrait être connue avec, au plus, une certitude empirique, sur la base d'un nombre suffisant d'instances ou par d'autres inférences inductives[13]. Si c'était le cas, cela signifierait que l'esprit humain

[9] C'est l'une des propositions qui sont indécidables à condition qu'aucune [proposition] fausse de la théorie des nombres ne soit dérivable. (Cf. le théorème précédent).

[10] A savoir les axiomes de Peano plus la règle de définition par induction ordinaire avec… [?] satisfaisant les exigences les plus strictement finitistes.

[11] S'il dit seulement : « Je crois que je pourrais les appréhender l'un après l'autre comme vrais » (leur nombre étant supposés être infini), il ne se contredit pas lui-même (voir plus bas).

[12] Ceci (ou la conséquence relative à la consistance des axiomes) constituerait une intuition mathématique non dérivable de l'axiome [et de ?] la règle en question contrairement à l'hypothèse.

[13] Il est par exemple concevable (bien que très au-delà des limites de la science d'aujourd'hui) que la physiologie du cerveau aille si loin que nous sachions avec certitude 1. que le cerveau suffit à l'explication de tous les phénomènes mentaux et s'avère être une machine au sens de Turing ; 2. que c'est ceci et cela la structure mathématique et le fonctionnement physiologique de la

(dans le domaine des mathématiques pures) *est* équivalent à une machine finie, qui est toutefois incapable de comprendre complètement[14] son propre fonctionnement. Cette incapacité à se comprendre soi-même lui apparaîtrait alors faussement comme son illimitation ou son inexhaustibilité. Mais notez, je vous prie, que si c'était bien le cas, ceci ne dérogerait en aucun cas à l'incomplétude des mathématiques objectives. Ceci la rendrait au contraire particulièrement frappante. Si l'esprit humain était équivalent à une machine finie, alors les mathématiques objectives seraient non seulement incomplètes au sens de n'être contenues dans aucun système d'axiomes bien défini, mais, en outre, il existerait *d'une façon absolue* des problèmes diophantiens du type décrit ci-dessus, le syntagme « d'une façon absolue » signifiant qu'ils seraient indécidables non pas seulement dans quelque système axiomatique particulier, mais selon *toute* démonstration mathématique que l'esprit humain puisse concevoir.

La conclusion disjonctive qui suit est par conséquent inévitable : *soit les mathématiques sont incomplètes au sens où ses axiomes évidents ne peuvent jamais être compris dans une règle finie, c'est-à-dire que l'esprit humain (même dans le domaine des mathématiques pures) surpasse infiniment les pouvoirs de toute machine finie ; soit il existe des problèmes diophantiens du type spécifié absolument insolubles* (le cas où chacun des deux termes de la disjonction sont vrais n'étant pas exclu, de telle sorte qu'il y a, au sens strict, trois alternatives). C'est ce fait mathématique établi qui me semble d'un grand intérêt philosophique. Bien sûr, pour faire ce rapport, il est d'une grande importance que ce fait au moins soit entièrement indépendant du point de vue spécial pris sur la fondement des mathématiques[15]. Il y a toutefois une restriction à cette indépendance, à savoir que le point de vue pris doit être suffisamment libéral pour admettre comme sensées les propositions à propos de tous les entiers. Si quelqu'un était un finitiste si strict qu'il ne considérerait comme appartenant aux mathématiques proprement dites[16] que les propositions du type 2+2=4, alors le théorème d'incomplétude ne pourrait pas s'appliquer. Mais je ne pense pas qu'une telle attitude puisse être tenue de manière consistante, parce que c'est par exactement la même sorte de preuve que nous jugeons que 2+2=4 et que a+b=b+a pour deux entiers a et b quels qu'ils soient. De plus, pour que ce point de vue soit consistant, il devrait exclure aussi les *concepts* qui se réfèrent à *tous* les entiers, tels que « + », (ou à toutes les formules telles que « preuve correcte selon telles ou telles règles »), et les remplacer par d'autres qui ne s'appliquent que dans des domaines finis d'entiers (ou de formules). Il faut cependant noter que, bien que la vérité du théorème disjonctif soit indépendante du point de vue pris, la question sur laquelle se fonde l'alternative ne doit pas en être indépendante.

---

partie du cerveau qui accomplit la pensée mathématique. De plus, en cas de point de vue finitiste (ou intuitionniste) , une telle inférence inductive pourrait être fondée sur une croyance (plus ou moins empiriste) que les mathématiques finitistes (ou intuitionnistes) sont consistantes.

[14] Bien entendu, le fonctionnement physique du mécanisme de pensée pourrait tout à fait être complètement incompréhensible. Cette idée selon laquelle ce mécanisme particulier doive toujours mener à des résultats corrects (ou seulement cohérents) pourrait excéder les capacités de la raison humaine.

[15] Pour les intuitionnistes et les finitistes, le théorème est une implication (au lieu d'une disjonction). Il est à remarquer que les intuitionnistes ont toujours affirmé le premier terme de la disjonction et nié le second terme au sens qu'il ne peut exister aucune proposition [?] indécidable. (Cf. plus haut p. [?]). Pour le finitisme il semble très probable que le premier terme de la disjonction est faux.

[16] K. Menger « … [?] » (Cf. *Blatter f.d. Phil.* 4 (1930) p. 323). Pris dans le sens le plus strict, ceci mènerait à une telle attitude, puisque, ainsi, les seules propositions mathématique sensées (*i.e.* les seules qui appartiennent aux mathématiques proprement dites) seraient celles qui assertent que telle ou telle conclusion peut être tirée de tels et tels axiomes et règles d'inférence de telle ou telle manière. Il s'agit cependant d'une proposition qui a exactement le même caractère logique que 2+2=4. Voici quelques conséquences indésirables qu'entraînent ce point de vue : une proposition négative de la conséquence selon laquelle la conclusion *B* ne peut pas être tirée des axiomes et de la règle *A* n'appartiendrait pas aux mathématiques proprement dites. Ainsi, rien ne pourrait être connu à son propos, sauf peut-être qu'elle dérive de certains autres axiomes et règles. Toutefois, une preuve qu'elle en dérive (puisque ces autres axiomes et règles sont encore arbitraires) n'exclurait en aucune manière la possibilité que (en dépit de la preuve formelle du contraire) une dérivation de *B* à partir de A puisse un jour être réalisée. Egalement pour la même raison, la démonstration inductive habituelle pour a+b=b+a n'exclurait pas la possibilité de découvrir deux entiers qui ne satisfassent pas cette équation.

Je pense avoir maintenant suffisamment expliqué l'aspect mathématique de la question et pouvoir me tourner vers les implications philosophiques. Bien sûr, à cause du non développement actuel de la philosophie, on ne doit pas s'attendre à ce que ces inférences soient faites avec une rigueur mathématique.

En correspondance avec la forme disjonctive du théorème principal relatif à l'incomplétude des mathématiques, les implications philosophiques, *prima facie*, seront aussi disjonctives, même si, et ce pour chacune des alternatives, elles sont très fermement opposées à la philosophie matérialiste. À savoir, si la première alternative est valide, cela semble impliquer que le travail de l'esprit humain ne puisse pas être réduit à celui du cerveau, qui, selon toutes apparences, est une machine finie avec un nombre fini de parties, c'est-à-dire les neurones et leurs connections. L'on est donc apparemment conduit à prendre un point de vue vitaliste. D'autre part, la seconde alternative, pour laquelle il existe des propositions mathématiques absolument indécidables, semble réfuter le point de vue selon lequel les mathématiques (dans tous les sens du terme) ne sont que notre propre création. Le créateur connaît nécessairement toutes les propriétés de ses créatures, parce qu'elles ne peuvent en avoir d'autres que celles qui leur ont été données. Cette alternative paraît donc impliquer que les objets et les faits mathématiques, ou au moins *quelque chose* en eux, existent objectivement et indépendamment de nos actes mentaux et de nos décisions, c'est-à-dire une forme ou une autre de platonisme ou de « réalisme » quant aux objets mathématiques[17]. L'interprétation empirique des mathématiques[18], c'est-à-dire le point de vue selon lequel les faits mathématiques sont un type spécial de faits physiques ou psychologiques, est trop absurde pour être retenue (voir plus bas).

[[Avec ces brèves formulations, j'ai bien entendu simplifié excessivement ces matières. Dans chaque cas, il y a certaines objections qui, selon moi, ne résistent cependant pas à un examen complet. En ce qui concerne la première alternative, on peut objecter que le fait que l'esprit humain soit plus efficace que toute machine finie n'implique pas nécessairement que quelque entité non matérielle telle qu'une entéléchie existe en complément du cerveau, mais seulement que les lois qui gouvernent le comportement de la matière vivante sont bien plus complexes que nous l'avons anticipé, et en particulier ne permettent pas que l'on déduise le comportement du tout à partir du comportement des parties isolées[19]. (Ce point de vue semble, de manière incidente, être partagé par la mécanique quantique pour laquelle l'état d'un système composé ne peut en général être décrit comme un composé d'états de systèmes partiels.) Il existe en fait une école de psychologues qui défend ce point de vue, nommément les soi-disant holistes. Il me paraît clair, cependant, que cette théorie abandonne en effet aussi le matérialisme, parce qu'elle impute depuis le début à la matière toutes les propriétés mystérieuses de l'esprit et de la vie, bien qu'originellement ce fut l'essence même du matérialisme que

[17] Il n'existe pas de terme d'une généralité suffisante pour exprimer exactement la conclusion tirée ici qui dit seulement que les objets et les théorèmes mathématiques sont aussi objectifs et indépendants de notre libre choix et de nos actes de création que l'est le monde physique. Ceci ne détermine en aucune façon ce que sont ces entités objectives, si elles sont situées dans la nature ou dans l'esprit humain, ou dans aucun des deux. Ces trois perspectives sur la nature des mathématiques correspondent exactement aux perspectives sur la nature des concepts qui… [?] sous le nom de psychologisme, conceptualisme aristotélicien, et platonisme.

[18] *I.e.* le point de vue selon lequel les objets mathématiques et la manière dont nous les connaissons ne sont pas essentiellement différents des objets et lois de la nature physique et psychologique. Il est vrai au contraire que si l'objectivité des mathématiques est supposée il s'ensuit aussitôt que leurs objets doivent être totalement différents des objets sensibles car ils *peuvent être* connus (en principe) sans l'usage des sens (i.e. par les moyens de la seule raison, … [?] ils ne concernent pas des réalités à propos desquelles les sens (le sens… [?] inclus) nous informent, mais les possibilités et les impossibilités). Les objets mathématiques sont généraux… [?]. Les mathématiques… [?] n'affirment rien à propos des réalités du monde spatio-temporel. En physique par exemple, rien n'est connu que de façon probable mais personne ne lui refuse à ce chef le statut de science exacte. Que notre attitude vis-à-vis des mathématiques soit différente, est selon moi [?].

[19] [[L'autre possibilité, à savoir attribuer déjà une « raison » au comportement des parties élémentaires (*i.e.* les neurones ou tout… [?]) paraît parfaitement improbable (à la fois en soi et dans la perspective du succès de la physique à expliquer le comportement de touts non structurés en termes de lois « calculables ».]]

d'expliquer ces propriétés de la structure de l'organisme et les lois relativement simples d'interaction entre les parties.]]

On ne sait pas si la première alternative est valide ou non, mais elle de toute façon en accord avec les opinions des meilleurs spécialistes de la physiologie du cerveau et des nerfs, qui nient puissamment la possibilité d'une explication purement mécaniste des processus psychiques et neuronaux. Quant à la seconde alternative, on pourrait objecter que le constructeur n'a pas nécessairement besoin de connaître *toutes* les propriétés de ce qu'il construit. Par exemple, nous construisons des machines et pourtant nous ne pouvons pas prédire leur comportement dans tous ses détails. Cette objection est néanmoins très pauvre. Nous ne créons pas les machines à partir de rien, mais nous les construisons à partir d'un matériau donné. Si la situation était similaire en mathématiques, alors ce matériau ou cette base pour notre construction serait quelque chose d'objectif et nous forcerait à adopter un point de vue réaliste, même si certains autres éléments des mathématiques seraient de notre propre création. Ce serait vrai également si dans nos créations nous *utilisions* quelque instrument situé en nous, mais qui différerait de notre *ego* (tel que « la raison », interprétée comme quelque chose de semblable à une machine pensante). Les faits mathématiques exprimeraient alors (du moins en partie) les propriétés de cet instrument, qui aurait une existence objective.

On pourrait troisièmement objecter que la signification d'une proposition concernant tous les entiers, puisqu'il est impossible de la vérifier pour tous les entiers un par un, peut seulement consister en l'existence d'une preuve générale. Ainsi, dans le cas d'une proposition indécidable sur les entiers qui n'est ni vraie elle-même, ni sa négation, donc qui n'exprime pas non plus une propriété des entiers objectivement existante mais une inconnue, je ne peux discuter maintenant la question de savoir si cette opinion est consistante ou non. Il semble certainement que si l'on devait *d'abord* comprendre la signification d'une proposition *avant* que l'on puisse en comprendre une preuve, alors la signification de « tout » ne pourrait pas être définie en termes de signification de « preuve ». Mais indépendamment de ces investigations épistémologiques, je voudrais souligner que l'on peut conjecturer la vérité d'une [?] proposition (par exemple, je pourrais vérifier une certaine propriété pour *tous* les entiers qui me sont donnés), et conjecturer dans le même temps qu'il n'existe aucune preuve générale pour ce fait. On peut aisément imaginer des situations dans lesquelles ces deux conjectures seraient très bien fondées. Pour la première partie, ce serait [?] le cas si la proposition en question était quelque équation du type $F(n)=G(n)$ qui pourrait être vérifiée jusqu'à un très grand nombre n[20].

De plus, tout comme dans les sciences naturelles, cette *inductio per enumerationem simplicem* n'est en aucun cas la seule méthode inductive en mathématiques. J'admets que tout mathématicien à une répugnance innée à donner à de tels arguments inductifs davantage qu'une signification heuristique. Je pense cependant que ceci est dû à ce préjugé selon lequel les objets mathématiques n'ont, en quelque sorte, aucune existence réelle. Si les mathématiques décrivent un monde objectif, tout comme le fait la physique, il n'y a aucune raison que la méthode inductive ne doive pas être appliquée aux mathématiques de la même manière qu'en physique. Le fait est qu'en mathématiques nous avons aujourd'hui la même attitude qu'aux époques précédentes l'on avait envers la science dans son ensemble, à savoir que nous essayons de tout dériver des définitions (c'est-à-dire, dans la terminologie de l'ontologie, de l'essence des choses) par des démonstrations convaincantes. Il est

[20] Une telle vérification d'une *égalité* (non pas d'une inégalité) entre deux fonctions numériques théoriques d'une structure pas trop complexe ou artificielle donnerait certainement une grande probabilité à leur complète égalité bien que sa valeur numérique ne puisse pas être estimée en l'état actuel de la science. Cependant, il est facile de donner des exemples de propositions générales à propos des entiers dans lesquelles la probabilité puisse être estimée dès maintenant. Par exemple la probabilité qu'une proposition affirmant que pour chaque *n* il y a au moins un *digit* différent de 0 entre le *digit n* et le *digit n+2* de l'expression décimale de pi, converge vers 1 lorsqu'on la vérifie pour des *n* de plus en plus grands. L'on se trouve dans une situation semblable également [?] pour les théorèmes de Goldbach et de Fermat.

possible que cette méthode, si elle réclame le monopole, soit aussi fausse en mathématiques qu'elle l'était en physique. Il est vrai que seule la seconde alternative pointe dans cette direction. Tout cet examen montre de manière incidente que les implications philosophiques des faits mathématiques expliqués ne se trouvent pas entièrement du côté de la philosophie rationaliste ou idéaliste, mais qu'à cet égard elles favorisent le point de vue empiriste[21].

Toutefois, *et c'est le point que je voudrais maintenant discuter*, il me semble que les conclusions philosophiques tirées de la seconde alternative, en particulier concernant le réalisme (platonisme), sont soutenues par les développements modernes du fondement des mathématiques, et ce que ce soit la première ou la seconde alternative qui est valide. Le principal argument pointant dans cette direction me paraît être le suivant. Tout d'abord, si les mathématiques étaient le fait de notre libre création, l'ignorance relative aux objets créés, il est vrai, serait toujours envisageable, mais seulement via un manque de conscience claire relativement à ce que nous avons réellement créé (ou… [?] due à la difficulté pratique relative à des calculs trop complexes). Elle devrait donc disparaître (au moins en principe, même si peut-être pas en pratique[22]) dès que nous atteindrons la clarté parfaite. Cependant, les développements modernes du fondement des mathématiques ont atteint un degré d'exactitude insurpassable, mais cela n'a pratiquement en rien aidé à la solution des problèmes mathématiques.

Deuxièmement, l'activité du mathématicien fait très peu montre de la liberté dont un créateur devrait jouir. Même si les axiomes relatifs aux entiers par exemple, étaient une libre invention, l'on devrait encore admettre que le mathématicien, après avoir imaginé les quelques premières propriétés de son objet, atteigne les limites de sa capacité créatrice, et ne soit pas dans une position dans laquelle il puisse aussi créer la validité des théorèmes selon sa volonté. Si quelque chose comme la création existe en mathématiques, ce que fait tout théorème, c'est restreindre la liberté de création. Ce qui la restreint, pourtant, doit évidemment exister indépendamment de la création[23].

Troisièmement : si les objets mathématiques étaient de notre création, alors, évidemment, les entiers et les ensembles d'entiers devraient être deux créations différentes. La première ne nécessite pas la seconde. Néanmoins, afin de prouver certaines propositions sur les entiers, le concept d'ensemble d'entiers est nécessaire. Et donc ici, pour découvrir quelles propriétés *nous* avons données à certains objets de pure imagination doivent d'abord être créés certains autres objets ; une situation pour le moins étrange !

Ce que j'ai dit jusqu'à présent a été formulé dans les termes du concept plutôt vague de « libre création » ou de « libre invention ». Il existe des tentatives pour donner une signification plus précise à ce terme. Toutefois, cela a pour seule conséquence que la réfutation du point de vue en question devienne aussi plus précise et convaincante. J'aimerais montrer ceci en détail, dans la plus précise, et en même temps la plus radicale formulation qui ait été donnée jusqu'à présent. C'est celui qui asserte que les propositions mathématiques ne sont vraies qu'en vertu de certaines règles arbitraires relatives à l'usage des symboles.

[Note de Gödel :] Omission jusqu'à la p. 39 du manuscrit

---

[21] Pour être plus précis, cela suggère que la situation en mathématiques n'est pas très différente de celle des sciences naturelles. Savoir si, en dernière analyse, c'est l'apriorisme ou l'empirisme qui est correct, est une question différente.

[22] *I.e.* chaque problème devrait être réductible à un calcul fini.

[23] Il n'est d'aucune utilité de dire que ses restrictions proviennent de l'exigence de consistance qui en elle-même procède de notre liberté de choix, car l'on pourrait choisir la consistance *et* certains théorèmes. N'aide pas non plus de dire que les théorèmes répètent seulement (totalement ou en partie) les propriétés d'abord inventées parce qu'alors la conscience exacte de ce qui a d'abord été supposé devrait être suffisante pour décider toute question de la théorie qui est réfutée par le premier et le troisième argument. Quant à la question de savoir si les propositions indécidables peuvent être décidées arbitrairement par un nouvel acte de création, Cf. note [?].

[[[C'est celui qui] interprète les propositions mathématiques comme exprimant seulement certains aspects de conventions syntaxiques (ou linguistiques[24]), à savoir que celles-ci répètent simplement des parties de ces conventions. Selon ce point de vue, les propositions mathématiques dûment analysées doivent se révéler vides de contenu, comme l'est par exemple la déclaration « Tous les étalons sont des chevaux ».

Chacun en sera d'accord, cette proposition n'exprime aucun fait zoologique ou objectif, mais sa vérité est uniquement due à cette circonstance que nous choisissons de nous servir du terme « étalon » comme une abréviation de « cheval mâle », puisque les règles les plus simples concernant l'usage des symboles sont des définitions. Maintenant, et de loin, le type le plus commun de conventions symboliques sont des définitions (soit explicites soit contextuelles, et où ces dernières doivent toutefois être telles qu'elles rendent possible l'élimination du terme défini dans chaque contexte où il apparaît). Par conséquent, la version la plus simple de la position en question consisterait en l'assertion selon laquelle les propositions mathématiques sont vraies seulement en raison des définitions des termes qui les composent, c'est-à-dire en remplaçant successivement tous les termes par leur *definientia*, chaque théorème pouvant être réduit à $a=a$ (notez que $a=a$ doit être admis comme vrai si les définitions sont admises, et l'on peut donc définir b par $b=a$, puis, en accord avec cette définition, remplacer b par a dans cette égalité). [Version alternative supprimée ensuite : « tout théorème peut être réduit à » :] [[une tautologie explicite, telle que $a=a$ ou $p \to p$ ou $p.q \to p$, ou quelque chose de ce genre ; (ce qui est considéré comme une tautologie explicite n'est pas tangible dans *cette* connexion, excepté que, afin de justifier le terme « explicite », il doit être possible et même aisé de savoir si une proposition donnée est une tautologie *explicite* ou non).]]

Mais il suit maintenant directement des théorèmes précédemment mentionnés qu'une telle réduction à des tautologies explicites est impossible. Cela mènerait en effet immédiatement à une procédure mécanique pour décider de la vérité ou de la fausseté de toute proposition mathématique. Une telle procédure, cependant, ne peut pas exister, et même pas pour la théorie des nombres. La réfutation, il est vrai, ne renvoie qu'à la version la plus simple de ce point de vue (nominaliste). Mais les plus raffinées ne s'en sortent pas mieux. L'affirmation la plus faible qui au moins devrait être démontrable pour que la position relative au caractère tautologique des mathématiques soit tenable, est la suivante : toute proposition mathématique démontrable peut être déduite de règles sémantiques relatives à la vérité et la fausseté des phrases seules (c'est-à-dire sans utiliser ou connaître rien d'autre que ces règles[25]), et les négations des propositions mathématiques démontrables ne peuvent être

[24] [[*I.e.* ces conventions ne doivent pas se référer à des objets extralinguistiques (comme le fait une définition démonstrat. [?]), mais ne doivent exposer des règles concernant la signification ou… [?] des expressions symboliques que sur le fondement de leur structure externe. Bien sûr, ces règles doivent en outre être telles qu'elles n'impliquent pas la vérité ou la fausseté d'aucune proposition factuelle (puisque dans ce cas elles ne pourraient certainement pas être dites ni vides de contenu ni syntaxiques). Il est à remarquer que, si le terme « règle syntaxique » est compris dans cette généralité, le point de vue en question contient, en tant qu'élaboration spéciale de celui-ci, le fondement formaliste des mathématiques. Puisque selon ce dernier les mathématiques sont seulement fondées sur certaines règles syntaxiques de la forme : les propositions ayant telle ou telle structure sont vraies (les axiomes), et : si les propositions de… structure sont vraies, alors telles et telles autres propositions sont également vraies. Et en outre la démonstration de consistance, comme on peut aisément le voir, a pour conséquence que ces règles sont vides de contenu dans la mesure où elles n'impliquent pas de propositions factuelles. Au contraire, et vice versa, on verra plus bas que la faisabilité du programme nominaliste implique la faisabilité du programme formaliste. On peut douter que ce point de vue (nominaliste) doive être subsumé sous la perspective qui considère les mathématiques comme une libre création de l'esprit, parce qu'elle nie tout à fait l'existence des objets mathématiques. Néanmoins, la parenté entre les deux est extrêmement grande puisque également selon l'autre perspective la soi-disant existence des objets mathématiques consiste seulement dans le fait d'être construite dans la pensée, et les nominaliste ne nieraient pas que nous imaginons en fait des objets (non existant) derrière les symboles mathématiques et que ces idées subjectives pourraient même fournir le principe directeur dans le choix des règles syntaxiques. Pour un exposé très lucide de l'aspect philosophique de la position nominaliste, Cf. H. Hahn, *Act. Sci. et ind.* 226 (1935) ou R. Carnap, *Act. Sci.* 291 (1935), *Erk.* 5 (1935) p. 30.

[25] [[Concernant l'exigence de consistance, Cf. note [?] [[Autrement, la solution serait bien entendu triviale. L'exigence de consistance suit aussi directement du concept de règle syntaxique (comme expliqué dans la note [?]) puisque un système inconsistant de règles syntaxiques impliquerait la vérité de toute proposition factuelle, alors que l'absence de contenu signifie qu'aucune proposition factuelle ne devrait suivre et ainsi entrer en conflit avec le critère de vérité qui suit des définitions dém.

dérivées ainsi (voir note 23). (Dans les langues formulées de manière précise, de telles règles – c'est-à-dire des règles qui stipulent sous quelles conditions une phrase donnée est vraie – sont un moyen de déterminer la signification des phrases. De plus, dans toutes les langues connues, il *existe* des propositions qui paraissent être vraies en raison de ces seules règles.) Par exemple, la disjonction et la négation sont introduites par les règles : 1) *p ou q* est vrai si au moins l'un des termes est vrai, et 2) *Non-p* est vrai si *p* n'est pas vrai. Il suit alors clairement de ces règles que *p ou non-p* est toujours vrai quel que soit p. (Les propositions ainsi dérivables sont appelées tautologies.)

Et en effet, pour les symbolismes de logique mathématique, avec un choix de règles sémantiques adéquates, la vérité des axiomes mathématiques est dérivable de ces règles[26] ; néanmoins (et c'est le grand obstacle), dans cette dérivation, les concepts mathématique et logique ainsi que les axiomes eux-mêmes doivent être utilisés d'une façon spéciale, à savoir en référence aux symboles, aux combinaisons de symboles, aux ensembles de combinaisons, etc. Par conséquent, cette théorie, si elle veut prouver le caractère tautologique des axiomes mathématiques, doit d'abord poser ces axiomes comme vrais. Ainsi, alors que l'originalité de cette manière de voir était de rendre la vérité des axiomes mathématiques compréhensible en démontrant qu'elles sont des tautologies, elle aboutit à l'exact l'opposé, c'est-à-dire à ce que la vérité des axiomes doit *d'abord* être posée, et il peut *alors* être démontré que, dans une langue convenablement choisie, elles sont des tautologies. [[Que ce soit faisable n'est, bien sûr, pas surprenant. Ceci pourrait être fait pour n'importe quels axiomes[27].]] Une telle assertion s'applique aussi bien aux concepts mathématiques, *i.e.* : au lieu d'être capable de définir leur signification au moyen de conventions syntaxiques, l'on doit d'abord connaître leur signification afin de comprendre les conventions syntaxiques en question ou la démonstration du fait qu'elles impliquent les axiomes mathématiques mais pas leur négation.

Il est clair, bien entendu, que l'élaboration de la position nominaliste ne satisfait pas l'exigence relative à p. [?] parce que ce ne sont pas les règles syntaxiques seules, mais toutes les mathématiques, qui, en plus, sont utilisées dans les dérivations. Mais cette élaboration du nominalisme mènerait en outre à une réfutation directe de celui-ci (je dois avouer que je ne peux imaginer meilleure *réfutation* de cette position que la démonstration de celle-ci), à condition qu'une chose puisse être ajoutée, à savoir que le résultat décrit est inévitable (c'est-à-dire indépendamment du langage symbolique particulier et de l'interprétation des mathématiques choisie). Ce n'est certes pas exactement ce qui peut être prouvé, mais il s'agit de quelque chose de si proche que cela suffit à réfuter la position en question. Ceci peut cependant être réalisé, à savoir qu'il s'ensuit qu'une preuve du caractère tautologique (dans une langue adéquate) des axiomes mathématiques est en même temps une preuve de leur consistance, et par conséquent, les métathéorèmes mentionnés ne peuvent être atteints avec des moyens de preuve plus faibles que ceux qui sont contenus dans ces axiomes eux-mêmes. Ceci ne veut pas dire que tous les axiomes d'un système donné doivent être utilisés dans la preuve de sa consistance. Habituellement, au contraire, les axiomes nécessaires sous-jacents au système rendent possible la suppression de certains des axiomes du système (bien qu'ils n'impliquent pas ces derniers).

[?].

[26] [[Cf. Ramsey F. P. *Proc. Lond. Math. Soc.* II ser 25 (1926) p. 368 p. 382, Carnap R. *Log. Synt. of Lang*. 1937 p. 39 et 110 et 182. Il vaut la peine de mentionner que Ramsey a même réussi à les réduire à des tautologies explicites *a=a* au moyen de définitions explicites, mais au coût d'admettre des propositions de longueur infinie (ou même transfinie) qui entraîne bien sûr la nécessité de présupposer la théorie des ensembles transfinis afin de pouvoir traiter ces entités infinies. Carnap, pour sa part, se confine aux propositions de longueur finie mais doit à la place considérer des ensembles infinis, des ensembles d'ensembles, etc. de ces propositions finies.

[27] [[Supposons par exemple quelqu'un qui serait doté d'un sixième sens qui lui donnerait seulement quelques perceptions et celles-ci sans aucune connexion causale avec la perception des autres sens. Il pourrait alors incorporer ces perceptions dans quelques règles syntaxiques qu'il pourrait démontrer comme étant tautologiques (*i.e.* sans conséquence pour les autres perceptions) en utilisant dans cette preuve les prop. [?] perçues des perceptions du sixième sens. Cette comparaison exprime selon moi très bien à la fois la relation de la raison avec les sens et la valeur de vérité des théories qui entreprennent de prouver que la raison est tautologique.

Ce qui suit cependant avec une certitude pratique est ceci : afin de prouver la consistance de la théorie classique des nombres (et *a fortiori* de tous les systèmes plus puissants), certains concepts abstraits (et les axiomes directement évidents qui s'y réfèrent) doivent être utilisés, « abstrait » qualifiant ici des concepts qui ne se réfèrent pas aux objets des sens[28], dont les symboles sont d'un type spécial. Ces concepts abstraits, cependant, ne sont bien entendu pas syntaxiques (mais plutôt ceux dont la justification par des considérations syntaxiques devrait être la tâche principale du nominalisme). Par conséquent, il suit qu'*il n'existe pas de justification rationnelle de nos croyances précritiques concernant l'applicabilité et la consistance des mathématiques classiques (ni même de son niveau le plus fondamental, la théorie des nombres) sur la base d'une interprétation syntaxique*. Il est vrai que cette affirmation ne s'applique pas à certains sous-systèmes des mathématiques classiques qui peuvent même contenir quelque *partie* de la théorie des concepts abstraits à laquelle elles se réfèrent. En ce sens, le nominalisme peut prétendre à quelques succès partiels. Il est en fait possible de fonder les axiomes de ces systèmes sur des considérations purement syntaxiques [[(sans aucune référence usant de concepts « abstraits »).]]. De cette manière, l'utilisation des concepts de « tout » et de « il y a » se référant aux entiers peut être justifiée (*i.e.* démontrée consistante) au moyen de considérations syntaxiques. Toutefois, en ce qui concerne l'axiome de théorie des nombres le plus essentiel, à savoir l'induction complète, une telle fondation syntaxique, même dans les limites où cela est possible, ne donne aucune justification de notre croyance précritique en celle-ci, puisque cet axiome lui-même doit être utilisé dans les considérations syntaxiques[29].

Etant donné que, plus vous êtes sobre concernant les axiomes pour lesquels vous voulez construire une interprétation tautologique, moins vous avez besoin de mathématiques pour ce faire, vous devenez finalement si sobre que vous vous confinez dans quelque domaine fini, par exemple les entiers jusqu'à 1000, et alors les propositions mathématiques valides dans ce champ peuvent être interprétées comme étant tautologiques, même au sens le plus strict, c'est-à-dire réductibles à des tautologies explicites au moyen de la définition explicite des termes. Ce n'est pas un problème parce que la partie des mathématiques nécessaire à la démonstration de consistance de ces mathématiques finies est déjà contenue dans la théorie des processus combinatoires finis qui sont nécessaires pour réduire par substitutions une formule à une tautologie explicite. Ceci explique le fait bien connu, mais trompeur, que des formules comme 5+7=12 peuvent, au moyen de certaines définitions, être réduites à des tautologies explicites. Ce fait, incidemment, est également trompeur pour cette raison que dans ces réductions (si on les interprète comme de simples substitutions du *definiendum* par le *definiens* sur le fondement de définitions explicites) le + n'est pas identique au + ordinaire parce qu'il peut seulement être défini pour un nombre fini d'arguments (par énumération de ce nombre de cas fini). (Si, au contraire, + est défini de manière contextuelle, alors on peut déjà se servir du concept de multiplicité finie dans la démonstration de 2+2=4.) Une circularité similaire [[similaire à celle que je viens juste de mettre en évidence dans la réduction de 5+7=12 à une identité explicite[30]]] se produit

---

[28] [[Voici des exemples de tels concepts abstraits : « ensemble », « fonction d'entiers » ou « démontrable » (ce dernier au sens non formaliste de « connaissable comme vrai ») ou « dérivable » etc. ou enfin « il y a » qui se réfère à… [?] des combinaisons *possibles* de symboles. La nécessité de tels concepts pour la démonstration de la consistance des mathématiques classiques résultent du fait que les symboles peuvent être calqués sur les entiers, et la théorie finitiste (et *a fortiori* classique) des nombres contient donc toutes les démonstrations fondées uniquement sur eux. La preuve de ce fait n'est pas encore absolument conclusive parce que les axiomes évidents qui se réfèrent aux concepts non abstraits en question n'ont pas été examinés suffisamment complètement. Le fait lui-même est toutefois admis même par les formalistes les plus convaincus.

[29] [[L'objection soulevée ici contre le fondement syntaxique de la théorie des nombres est pratiquement la même que celle que Poincaré a opposée au fondement de la théorie des nombres à la fois de Frege et de Hilbert. Cependant, cette objection n'est pas justifiée contre Frege parce que les concepts logiques et les axiomes qu'il doit présupposer ne contiennent pas explicitement le concept de « multiplicité finie » avec ses axiomes alors que les concepts grammaticaux et les considérations [?] nécessaires pour construire les règles syntaxiques et établir leur caractère tautologiques le font.

[30] [[Cette circularité n'implique pas que (comme Poincaré… [?]) la dérivation par Frege de telles équations à partir des axiomes de la théorie ou de la logique des ensembles contienne un cercle vicieux (Cf. note [?]). En effet, pour Frege, contrairement aux nominalistes, une inférence n'est pas une opération combinatoire sur certaines combinaisons finies de *symboles* (ce qui implique le concept de multiplicité finie) mais une idée relative aux *concepts* logiques qui y interviennent.

également dans la démonstration que *p ou non-p* est une tautologie, car la disjonction et la négation dans leur sens intuitif y apparaissent évidemment.]]

[Note de Gödel, après ces pages omises] :

[[Mes considérations sur le platonisme ont été jusqu'ici principalement *apagogiques*, c'est-à-dire que j'ai essayé de réfuter la position opposée sous ses formes diverses. En conclusion de cette conférence, j'aimerais décrire de manière positive et plus détaillée la position relative à la nature des mathématiques à laquelle l'on est conduit, selon moi, par les développements moderne quant à ses fondements. Je pense que ceci peut être mieux fait … […] la position que je critiquais.]]

L'essence de cette position est qu'il n'existe rien de tel qu'un fait mathématique, que la vérité des propositions par lesquelles nous croyons exprimer des faits mathématiques signifie seulement que (en raison des règles quelque peu compliquées qui définissent la signification des propositions *i.e.* qui déterminent dans quelles circonstances une proposition donnée est vraie) dans ces propositions, l'on a affaire à un fonctionnement injustifié du langage, propositions que lesdites règles rendent vraies quels que soient les faits… [?]. De telles propositions peuvent à bon droit être dites vides de contenu. En fait, il est possible de construire un langage dans lequel les propositions mathématiques sont, en ce sens, vides de contenu. Seulement, le problème est 1. que l'on doit utiliser les mêmes faits mathématiques (ou des faits mathématiques de même complexité) afin de démontrer leur non existence, 2. que, par cette méthode, une division des faits empiriques en deux parties *A*, *B* étant donnée, de telle sorte que *B* n'implique rien en *A*, un langage peut être construit dans lequel les propositions exprimant *B* seraient vides de contenu. Et si votre adversaire disait : vous ignorez arbitrairement certains faits observables *B*, l'on pourrait répondre : vous faites la même chose, par exemple avec la loi de l'induction complète que je considère être vraie sur la base de ma compréhension (*i.e.* perception) du concept d'entier. De plus, on voit aisément que pour toute division des faits *empiriques* en deux classes *A*, *B* de telle sorte que les faits de *B* n'impliquent rien de ceux de *A*, en se servant des faits de *B*, on pourrait construire un langage dans lequel les propositions qui expriment les faits de *B* seraient « vides de contenu » et vraies seulement en raison de règles sémantiques.

Il me semble néanmoins qu'un élément de cette fausse théorie de la vérité mathématique est parfaitement correct et dévoile réellement la vraie nature des mathématiques. À savoir, il est vrai qu'une proposition mathématique ne dit rien à propos de l'existence physique ou psychique dans l'espace et le temps, parce qu'elle est déjà vraie en vertu de la signification des termes qui la composent, quoi qu'il en soit du monde des choses réelles. Ce qui est faux toutefois, c'est que la signification des termes (*i.e.* les concepts qu'ils dénotent) est affirmée comme étant quelque chose d'artificiel et qui consiste simplement en des conventions sémantiques. Je crois que la vérité est que ces concepts forment une réalité objective à part, que nous ne pouvons créer ou modifier, mais seulement percevoir et décrire[31]. Une proposition mathématique, par conséquent, bien qu'elle ne dise rien de la réalité spatio-temporelle, peut malgré tout avoir un véritable contenu objectif, en ce qu'il dit quelque chose des relations entre les concepts. L'existence de relations non « tautologiques » entre les concepts mathématiques, apparaît [[non pas tant dans le fait trivial que nécessairement certaines idées primitives, c'est-à-dire indéfinissables, doivent être posées à la fois pour les mathématiques et la syntaxe, mais]] surtout dans les circonstances où doivent être posés les termes primitifs des axiomes mathématiques, qui ne sont en aucun cas des tautologies, au sens d'être d'une manière ou d'une autre réductible à $a=a$, mais dérive toujours de la signification des termes primitifs en question.

[31] Ceci vaut aussi pour ces parties des mathématiques qui *peuvent* être réduites à des règles syntaxiques (Cf. plus haut). Ces règles sont fondées sur l'idée d'une multiplicité finie (à savoir une séquence finie de symboles) et cette idée comme ses propriétés sont entièrement indépendantes de notre libre choix. En fait, sa théorie est équivalente à la théorie des entiers. La possibilité de construire ainsi un langage dans lequel cette théorie est incorporée sous la forme de règles syntaxiques ne prouve rien, Cf. note [?].

Par exemple, l'axiome de base ou plutôt le schéma d'axiome pour le concept d'ensemble d'entiers déclare que, étant donné une propriété bien définie d'entiers (*i.e.* une expression propositionnelle φ(n) avec une valeur entière n), il existe l'ensemble *M* de ces entiers qui ont la propriété φ. Considérée la circonstance selon laquelle φ peut contenir elle-même le terme « ensemble d'entiers », nous avons ici une série d'axiomes, relativement sophistiqués, à propos du concept d'ensemble. Ces axiomes (comme le montrent les résultats susnommés) ne peuvent cependant pas être réduits à quelque chose de sensiblement plus simple, et encore moins à des tautologies explicites. Il est vrai que ces axiomes sont valides en raison de la signification du terme « ensemble », on pourrait même dire qu'ils expriment la signification même du terme ensemble, et par conséquent pourraient à bon droit être appelés analytiques ; toutefois, le terme tautologique, *i.e.* dépourvu de contenu, est à leur sujet totalement déplacé, parce que même l'affirmation de l'existence d'un concept d'ensemble satisfaisant ces axiomes (ou de la consistance de ces axiomes) est si loin d'être vide qu'elle ne peut être considérée [?] sans utiliser de nouveau le concept d'ensemble lui-même ou d'autres concepts abstraits de nature similaire.

Cet argument particulier est bien sûr uniquement adressé aux mathématiciens qui admettent le concept général d'ensemble dans les mathématiques proprement dites. Pour les finitistes, cependant, littéralement le même argument pourrait être allégué pour le concept d'entier et l'axiome d'induction complète. Si le concept général d'ensemble *n'*est *pas* admis au sein des mathématiques proprement dites, alors l'induction complète doit être posée comme un axiome. [[Je ne pense pas que l'on puisse objecter à ce point de vue, concernant l'analycité des mathématiques, qu'une proposition mathématique indécidable, dont la vérité pourrait être reconnue au plus de façon probable, ne peut pas être analytique. J'utilise ce terme]] Je souhaite répéter qu'ici, analytique ne signifie pas [[au sens subjectiviste de]] « vrai en vertu de la nature des concepts en jeu » ; par opposition à [[synthétique, qui signifierait]] « vrai en vertu des propriétés et du comportement des choses ».

Ce concept d'analytique est si loin de signifier « vide de contenu » qu'il est parfaitement possible qu'une proposition analytique puisse être indécidable (ou décidable seulement de façon probable). Notre connaissance du monde des concepts peut être aussi limitée et incomplète que celle à propos du monde des choses. Il est certain et indéniable que cette connaissance (dans certains cas) est non seulement incomplète, mais même indistincte. Ceci se produit dans les paradoxes de la théorie des ensembles, fréquemment allégués comme réfutation du platonisme, mais, je pense, de façon tout à fait injuste. Nos perceptions visuelles contredisent parfois nos perceptions tactiles, par exemple dans le cas d'un bâton immergé dans l'eau, mais aucun esprit sain n'en conclura que le monde extérieur n'existe pas.

Je ne prétends bien sûr pas que les considérations suscitées soient équivalentes à une preuve réelle de cette position sur la nature des mathématiques. Le plus que l'on puisse affirmer serait d'avoir réfuté la position nominaliste, laquelle considère que les mathématiques consistent seulement en de conventions syntaxiques et leurs conséquences. J'ai en outre présenté quelques arguments puissants contre la position plus générale selon laquelle les mathématiques sont de notre création. Il y a cependant d'autres alternatives au platonisme, en particulier le psychologisme et le réalisme aristotélicien. Afin d'établir le réalisme platonicien, ces théories doivent être réfutées les unes après les autres, et il devra alors être démontré qu'elles épuisent toutes les possibilités. Je ne suis pas en mesure de le faire [[de manière concluante]] maintenant ; cependant, j'aimerais donner quelques indications dans les lignes qui suivent.

Une forme possible de psychologisme admet que les mathématiques explorent les relations entre concepts et que les concepts ne peuvent être créés selon notre volonté, mais nous sont donnés comme une réalité qui ne peut pas changer, mais celle-ci nie toutefois que ces concepts soient seulement des dispositions [[ou des structures]] psychologiques [[dans nos esprits]], c'est-à-dire qu'ils ne sont rien, mais pour ainsi dire les roues de notre machine pensante. Pour être plus exact, un concept consisterait en une disposition : 1. à avoir une certaine expérience mentale lorsque nous y pensons, 2. à adopter certains jugements (ou à avoir certaines expériences directes) à propos de ses relations à d'autres concepts ou aux objets empiriques. L'essence de cette position psychologiste est que l'objet des mathématiques n'est rien sinon les lois par lesquelles les pensées, convictions, etc. nous arrivent, au même sens que l'objet d'une autre partie de la psychologie sont les lois par lesquelles les émotions se produisent en nous. L'objection principale à ce point de vue que j'ai à l'esprit c'est que, s'il est correct, nous n'aurions aucune connaissance mathématique quelle qu'elle soit. Par exemple, nous ne saurions pas que 2+2=4, mais seulement que notre esprit est ainsi constitué qu'il tient ceci pour vrai, et il n'y aurait alors aucune raison que, par quelque autre suite de pensées, nous ne pourrions pas parvenir à la conclusion opposée avec le même degré de certitude. Ainsi, quiconque pose qu'il existe quelque domaine, si petit soit-il, de propositions *mathématiques* que nous savons vraies, ne peut pas soutenir cette thèse.

[[Une autre forme de psychologisme déclare que, non pas les concepts mathématiques, mais les objets auxquels ils se réfèrent, sont quelque chose de purement subjectif ou mental, par exemple les opérations de l'esprit consistant à passer à l'entier suivant en comptant. Si cette thèse soutient que les propositions à propos de ces entités mentales sont analytiques (dans n'importe quelle acception de ce terme), alors elle [[c'est aussi le cas du platonisme[32]]] doit aussi affirmer que notre connaissance des propositions analytiques est confiné aux propositions se référant aux phénomènes mentaux qui [[si on accepte le platonisme]] me semblent tout à fait artificiels et inacceptables. Si, au contraire, l'on soutient que les propositions relatives à ces entités mentales sont synthétiques, il est difficile de voir comment une quelconque proposition universelle peut être connue, sauf par une généralisation inductive[33].

En ce qui concerne la position correspondant au réalisme aristotélicien [[(qui affirme que les concepts sont des parties ou « aspects » des choses spatio-temporelles) il me semble qu'elle ne sera guère capable de donner un compte rendu satisfaisant des concepts d'un plus haut niveau que le premier (et tous les concepts mathématiques sont tels)]], elle ne pourra guère être en mesure de soutenir que les objets des mathématiques sont des objets singuliers de la nature (tels des tas de cailloux). Si toutefois les objets de la nature auxquels les mathématiques ont affaire sont considérés comme des qualités (et des relations) alors on rencontrera toutes les difficultés liées à la thèse aristotélicienne selon laquelle les qualités et les relations sont des parties (abstraites) des choses. En particulier, la transitivité de la relation de partie semble impliquer que les qualités de qualités sont les qualités des choses. Il est de plus difficile de penser à tous les mondes possibles comme à des parties du monde réel. Je n'ai pas encore clarifié tous les aspects de ces questions de la manière qui me satisferait. Il ne s'agit là bien entendu que de considérations livrées pêle-mêle.]]

J'ai l'impression qu'après une clarification suffisante des concepts en question, il sera possible de conduire ces discussions avec une rigueur mathématique et qu'il en résultera alors que (sous certaines hypothèses qui ne peuvent guère être niées – en particulier celle selon laquelle il existe

[32] [[Comme on l'a remarqué dans la note [?], cette simple hypothèse selon laquelle les concepts sont quelque chose d'objectif (*i.e.* d'extra-mental) ne veut pourtant pas dire réalisme platonicien mais plutôt disjonction de cette position d'avec le conceptualisme aristotélicien [[pour lequel les concepts sont des éléments (ou « parties abstraites ») du monde spatio-temporel qui vient à notre connaissance en application la faculté d'analyse (ou d'abstraction) de notre esprit au matériau fourni par les sens]]. Cependant, avec cette théorie, aucune autre proposition *a priori* à propos des concepts ne paraît être possible, sauf celles qui exposent les relations de partie à tout entre ces constituants, c'est-à-dire de telle sorte qu'elles puissent être réduites à des tautologies explicites. Ainsi, en conséquence de la nature non tautologique des axiomes mathématiques (voir plus haut) le conceptualisme aristotélicien [[semble impliquer que la nature synthétique des mathématiques ne peut être soutenue]] est inapplicable aux mathématiques.

[33] [[Kant a soutenu la possibilité de celle-ci en raison de sa « pure » intuition dont la fonction est de nous présenter une totalité d'objets *singuliers* (*i.e.* points, lignes, etc.) de telle manière que, contrairement à la perception par les sens, l'on puisse lire directement les propositions générales à partir de cette perception sans avoir recours à quelque extrapolation ou induction… [?].]]

quelque chose comme la connaissance mathématique) le platonisme est la seule thèse tenable. En l'espèce, je parle de la thèse selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensible, qui existe indépendamment à la fois des actes et des dispositions de l'esprit humain et n'est perçue, probablement de manière très incomplète, que par l'esprit humain. Cette thèse est plutôt impopulaire parmi les mathématiciens, il y a cependant quelques grands mathématiciens qui y ont adhéré. Hermite, par exemple, a un jour écrit la phrase suivante :

> « Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons accès que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques ; l'un et l'autre indépendant de nous, tous deux de création divine[34] »

Traduit par Thomas Duzer

[34] Cf. G. Darboux, *Eloges académ. et discours*, 1912, p. 142. Le passage cité continue ainsi : « qui ne semblent distincts qu'à cause de la faiblesse de notre esprit qui ne sont pour une pensée plus puissante qu'une seule et même chose et dont la synthèse se révèle partiellement dans cette merveilleuse correspondance entre la mathématique abstraite d'une part, l'Astronomie et toutes les branches de la physique de l'autre. » Hermite semble donc incliner ici vers le réalisme aristotélicien. Il ne le fait pourtant que métaphoriquement, puisque le platonisme demeure la seule conception compréhensible par l'esprit humain.